Лекция 15

Интегрирование полных уравнений гидротермодинамики методом расщепления

Цель: объяснение подход решения системы полных уравнений гидротермодинамики, где заданная система уравнений разбивается на несколько более простых систем, решаемых последовательно, причем каждая часть описывает вполне определенную динамику метеорологических элементов.

Основы математического моделирования атмосферных процессов, лектор ассоциированный профессор Маусумбекова Сауле Джумакановна

Постановка задачи

Рассмотрим этот метод на примере адиабатической модели без учета турбулентной вязкости, а также малых членов, содержащих производную $\partial\tau/\partial p$. Уравнения модели запишем в виде:

$$
\begin{aligned}
&u_t + uu_x + vu_y + lv = -gH_x;\\
&u_t + uv_x + vv_y - lu = -gH_y;\\
&T_t + uT_x + vT_y = c^2\tau/Rp;\\
&u_x + v_y + \tau_p = 0;\\
&T = -gpH_p/R.
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Здесь и далее индексы x, y, p, t означают частные производные по соответствующим переменным.

Метод расщепления

В соответствии с методом расщепления система уравнений (7.1) заменяется двумя системами уравнений:

$$u_t+uu_x+vu_y=0;$$
$$v_t+uv_x+vv_y=0;$$
$$T_t+uT_x+vT_y=0 \qquad (7.2)$$

и

$$u_t+lv=-gH_x;$$
$$v_t-lu=-gH_y;$$
$$T_t=c^2\tau/Rp;$$
$$u_x+v_y+\tau_p=0; \quad T=-gpH_p/R. \qquad (7.3)$$

Система уравнений (7.2) описывает горизонтальный перенос метеорологических субстанций вдоль потока, а система уравнений (7.3) — адаптацию метеорологических полей. Заметим, что каждая из систем уравнений (7.2) и (7.3) проще, чем исходная система уравнений (7.1): при этом система уравнений (7.3) оказывается линейной.

Методы решения

Рассмотрим вначале систему уравнений (7.2), которую запишем в виде

$$\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y = 0, \tag{7.4}$$

где вектор φ имеет вид

$$\varphi = \begin{vmatrix} u \\ v \\ T \end{vmatrix}.$$

Для простоты рассмотрим вначале следующее уравнение

$$\varphi_t + u\varphi_x = 0. \tag{7.5}$$

При этом вначале u будем считать известным. Решая задачу шагами по времени, каждый шаг по времени $\delta t = t_{s+1} - t_s$ разобьем на два равных интервала.

.

Методы решения

На первом из них $t_s \leqslant t \leqslant t_{s+\frac{1}{2}}$ уравнение (7.5) аппроксимируем разностным уравнением первого порядка точности по обеим переменным с односторонне-направленными разностями

$$\varphi_i^{s+\frac{1}{2}} = \varphi_i^s - \mu_i \begin{cases} \varphi_i^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{i-1}^{s+\frac{1}{2}} & \text{при } \mu_i \geqslant 0; \\ \varphi_{i+1}^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_i^{s+\frac{1}{2}} & \text{при } \mu_i < 0, \end{cases} \tag{7.6}$$

где $\mu_i = u_i\, \delta t / 2\delta x$. Обратим внимание на то, что член φ_x записан неявным образом. Легко убедиться, что уравнение (7.6) можно записать в виде

$$a_i \varphi_{i-1}^{s+\frac{1}{2}} - 2b_i \varphi_i^{s+\frac{1}{2}} + c_i \varphi_{i+1}^{s+\frac{1}{2}} = -g_i, \tag{7.7}$$

где

$$a_i = |\mu_i| + \mu_i; \quad b_i = 1 + |\mu_i|;$$

$$c_i = |\mu_i| - \mu_i; \quad g_i = 2\varphi_i^s.$$

Методы решения

Можно показать, что формально разностное уравнение (7.7) аппроксимирует уравнение

$$\varphi_t + u\varphi_x = k\varphi_{xx},$$

где

$$k = \frac{u^2\,\delta t}{4} + \frac{|u|\,\delta x}{2}.$$

Таким образом, аппроксимация уравнения (7.5) разностной схемой (7.7) приводит к появлению эффекта фиктивной или счетной вязкости, причем величина коэффициента вязкости k может быть очень большой, что приводит к сглаживанию метеорологических полей.

На втором интервале $t_{s+\frac{1}{2}} \leqslant t \leqslant t_{s+1}$ производится коррекция полученного решения с помощью схемы с центральными разностями, имеющей второй порядок точности

$$\varphi^{s+1} = \varphi^{s} - \mu_i \left(\varphi_{i+1}^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{i-1}^{s+\frac{1}{2}}\right). \qquad (7.8)$$

В целом комбинация схем (7.7) и (7.8) приводит к аппроксимации второго порядка точности по переменным t и x и является счетно-устойчивой. При этом (7.8) ликвидирует эффект фиктивной вязкости.

Методы решения

Рассмотренная схема с двумя этапами называется схемой «предиктор — корректор».

Вернемся теперь к решению системы уравнений переноса (7.2) или соответствующему ей уравнению (7.4) и системы уравнений адаптации (7.3). Разбивая шаг по времени на две части, сначала решим уравнение переноса, в результате чего получим значения элементов $\varphi(u, v, T)$ для момента $s+{}^1/_2$. После этого, решая уравнения адаптации, находим значения всех элементов в момент времени $s+1$.

В соответствии с методом расщепления первую часть задачи решаем в два этапа по уже рассмотренной схеме «предиктор — корректор». Рассмотрим сначала этап предиктора, охватывающий промежуток времени $\delta t/4$ между моментами s и $s+{}^1/_4$. Имея в виду зависимость искомой функции от двух переменных — пространственных координат x и y — разобьем рассматриваемый интервал времени $\delta t/4$ еще на два, каждый длительностью по $\delta t/8$. В пределах первого из этих интервалов будем учитывать перенос только по оси x, а в пределах второго — по оси y. Тогда расчет на этапе предиктора сведется к последовательному решению двух одномерных уравнений адвекции типа (7.5): сначала по переменной x, а затем по y.

Методы решения

В уравнении притока тепла:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT'}{dt} + \frac{d\bar{T}}{dt} = \frac{dT'}{dt} + w\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{dT'}{dt} - \bar{\gamma} w;$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp'}{dt} + \frac{d\bar{p}}{dt} \approx w\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -wg\bar{\rho};$$

$$\frac{\gamma_a}{g\rho}\frac{dp}{dt} \approx \frac{\gamma_a}{g\bar{\rho}} w \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \approx -\gamma_a w.$$

В уравнении переноса влаги

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq'}{dt} + \frac{d\bar{q}}{dt} = \frac{dq'}{dt} + w\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \approx \frac{dq'}{dt} - w\bar{\gamma}_q.$$

Методы решения

Введем конечно-разностные операторы

$$\Delta_k\varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_k; \quad \Delta_{-k}\varphi = \varphi_k - \varphi_{k-1};$$

$$\nabla_k\varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_{k-1},$$

где k — любая из конечно-разностных координат i или j.

Тогда на этапе предиктора последовательно решаются следующие конечно-разностные уравнения:

$$\varphi^{s+\frac{1}{8}} = \varphi^s - \frac{\delta t}{4\delta s} u^s \Delta_k \varphi^{s+\frac{1}{8}};$$

$$\varphi^{s+\frac{1}{4}} = \varphi^{s+\frac{1}{8}} - \frac{\delta t}{4\delta s} v^s \Delta_m \varphi^{s+\frac{1}{4}}, \tag{7.9}$$

где оператор Δ_k имеет вид

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta_{-k} & \text{при } u^s \geqslant 0; \\ \Delta_k & \text{при } u^s < 0. \end{cases}$$

Методы решения

Аналогичный смысл имеет и оператор Δ_m. При решении каждого из уравнений (7.9) используется метод, рассмотренный на примере уравнения (7.5). В результате мы получаем значения φ для момента $s+{}^1/_4$.

На втором этапе решается разностное уравнение схемы корректора, которое имеет вид

$$\varphi^{s+\frac{1}{2}}=\overset{s}{\varphi}-\frac{\delta t}{4\delta s}\left(\overset{*}{u}\nabla_k\varphi^{s+\frac{1}{4}}+\overset{s}{v}\nabla_m\varphi^{s+\frac{1}{4}}\right). \qquad (7.10)$$

Имея значения $\varphi^{s+\frac{1}{2}}$ т. е. u, v и T для момента времени

$s+{}^1/_2$ (или $t+\delta t/2$), мы можем теперь перейти к решению второй части нашей задачи, т. е. к решению уравнений адаптации (7.3) и получению значений всех рассматриваемых переменных для момента времени $s+1$. Для этого запишем систему уравнений (7.3) в конечных разностях, используя неявную схему. Производные по времени запишем с учетом того, что значения переменных в момент $s+{}^1/_2$ уже определены на этапе «предиктор — корректор».

Члены уравнений, не содержащие производных по времени, отнесем к моменту $s+1$. Соответствующие системе уравнений (7.3) конечно-разностные соотношения примут вид:

$$\frac{u^{s+1}-u^{s+\frac{1}{2}}}{\delta t}+lv^{s+1}=-gH_x^{s+1};$$

$$\frac{v^{s+1}-v^{s+\frac{1}{2}}}{\delta t}-lu^{s+1}=-gH_y^{s+1};$$

$$\frac{T^{s+1}-T^{s+\frac{1}{2}}}{\delta t}=\frac{c^2}{Rp}\tau^{s+1};$$

$$u_x^{s+1}+v_y^{s+1}+\tau_p^{s+1}=0; \qquad T^{s+1}=-\frac{g}{R}pH_p^{s+1}. \qquad (7.11)$$

Основы математического моделирования атмосферных процессов, лектор ассоциированный профессор Маусумбекова Сауле Джумакановна

Данная система из пяти уравнений содержит пять неизвестных. Из этих пяти уравнений получим одно уравнение для H^{s+1}. С помощью первых двух уравнений системы выразим u^{s+1} и v^{s+1} через H^{s+1}. Затем, заменив в третьем уравнении T^{s+1} на H^{s+1} с помощью уравнения статики, выразим τ^{s+1} через H^{s+1}. Подставив полученные выражения для u^{s+1}, v^{s+1} и τ^{s+1} в уравнения неразрывности, получим уравнение для H^{s+1}

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{c^2}\frac{\partial H^{s+1}}{\partial p}\right)+\frac{c^2(\delta t)^2}{d^2}\left[\Delta H^{s+1}+\delta t\left(l_y H_x^{s+1}-l_x H_y^{s+1}\right)\right]=$$

$$=-\frac{R}{g}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{c^2}T^{s+\frac{1}{2}}\right)+\frac{\delta t}{gd^2}\left[u_x^{s+\frac{1}{2}}+v_y^{s+\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+l\delta t\left(u_y^{s+\frac{1}{2}}-v_x^{s+\frac{1}{2}}\right)+\delta t\left(l_y u^{s+\frac{1}{2}}-l_x v^{s+\frac{1}{2}}\right)\right],$$

где $d^2=1+(l\,\delta t)^2$.

Полученное линейное дифференциальное уравнение в частных производных по x, y, p для H^{s+1} сходно с уравнением для $\frac{\partial H}{\partial t}$ в квазигеострофических моделях прогноза. Оно решается методом биортогонализации при соответствующих краевых условиях. С помощью найденных значений H^{s+1} и уравнений системы (7.11) определяются все остальные неизвестные.

Вопросы для самоконтроля:

1. Основная идея метода расщепления. Опишите подсистемы.
2. Напишите аппроксимацию уравнения переноса односторонне направленными разностями
3. Напишите коррекцию полученного решения, используя центральную разность по пространственным переменным
4. Опишите вторую систему, полученную при применении метода расщепления

3. Напишите алгоритм и выведите уравнение для определения

H^{s+1}.